

מכינות ריבנון והשלמה במתמטיקה

פרק 7 - סדרות - המשך

תוכן העניינים

1.	היכרות עם סדרות
1 (לא ספר)
2	חישוב גבול לפי כללי חשבון גבולות
3 חישוב גבול לפי אוילר
4 חישוב גבול לפי כלל הסנדוויץ
7 חישוב גבול לפי מבחן המנה ו מבחן השורש

חישוב גבול לפי כללי חשבון גבולות

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 2}{n^2 + 1000n} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-n})^{\ln n} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^5 + 10n} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^2 + 10n} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n} \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 5n + 6}{2n + 10} - \frac{n}{2} \right) \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{3n-3}}{\sqrt{4n+1} - \sqrt{5n-1}} \quad (8)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^4 + 2n^2 + 6 + 27n^6}}{\sqrt[3]{3n^3 + 10n + 4n^4}} \quad (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^n + 3^{n+1}}{81^{0.5n} + 3^{n+3}} \quad (10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16^n + 4^{n+1}}{2^{4n+2} + 2^{n+3}} \quad (9)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3n^3 - 5n - 1}{n^3 - 2n^2 + 1} \right) \quad (12)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{4n^2 + 2}{n^2 + 1000n}} \quad (11)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{an+1}{bn+2}} \quad (14)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^4 + 10n}} \quad (13)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + kn} - n) \quad (16)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 5n} - n) \quad (15)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^4 + n^2 + 1} - n^2) \quad (18)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - n) \quad (17)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sin \left(\frac{4}{n} \right) \quad (20)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an} - \sqrt{n^2 + bn}) \quad (19)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3 + n^2 + 1} \quad (22)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2 + 4n + 1} \quad (21)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) \quad (24)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \sin \frac{1}{n} \quad (23)$$

$$\cdot \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad * \quad \text{רמז לשאלת 24:}$$

הערה חשובה מאוד!

בפתרון המלא, יופיע במקום המשתנה n – המשתנה א. יש להתייחס אל א' כאל מספר טבעי!
בנוסף, יש לזכור שסדרה היא פונקציה (מהטבעיים לממשיים) ולכן לעיתים אומר פונקציה במקום סדרה.

תשובות סופיות

$$4 \quad \mathbf{(2)} \qquad \qquad \qquad 0 \quad \mathbf{(1)}$$

$$0 \quad \mathbf{(4)} \qquad \qquad \qquad \infty \quad \mathbf{(3)}$$

$$1 \quad \mathbf{(6)} \qquad \qquad \qquad -5 \quad \mathbf{(5)}$$

$$\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}} \quad \mathbf{(8)} \qquad \qquad \qquad 1.5 \quad \mathbf{(7)}$$

$$4 \quad \mathbf{(10)} \qquad \qquad \qquad 0.25 \quad \mathbf{(9)}$$

$$\ln 3 \quad \mathbf{(12)} \qquad \qquad \qquad 2 \quad \mathbf{(11)}$$

$$e^{\frac{1}{3}} \quad \mathbf{(13)}$$

$$, \left(\lim a_n = \infty \right) \Leftarrow \left(a > 0, b = 0 \right) , \left(\lim a_n = \sqrt[5]{a/b} \right) \Leftarrow \left(b \neq 0 \right) \quad \mathbf{(14)}$$

$$\left(\lim a_n = -\infty \right) \Leftarrow \left(a < 0, b = 0 \right)$$

$$\frac{k}{2} \quad \mathbf{(16)} \qquad \qquad \qquad 2.5 \quad \mathbf{(15)}$$

$$0.5 \quad \mathbf{(18)} \qquad \qquad \qquad 0.5 \quad \mathbf{(17)}$$

$$4 \quad \mathbf{(20)} \qquad \qquad \qquad \frac{a-b}{2} \quad \mathbf{(19)}$$

$$\frac{1}{3} \quad \mathbf{(22)} \qquad \qquad \qquad 0.5 \quad \mathbf{(21)}$$

$$1 \quad \mathbf{(24)} \qquad \qquad \qquad \infty \quad \mathbf{(23)}$$

чисוב גבול לפי אוילר

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^n \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n+4}\right)^{4n^2} \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n-3}\right)^n \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \tan \frac{1}{n}\right)^n \quad (8)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+4n+1}{n^2+n+2}\right)^{10n} \quad (7)$$

תשובות סופיות

$$1 \quad (2)$$

$$e^{0.5} \quad (1)$$

$$e^{-1} \quad (4)$$

$$e^2 \quad (3)$$

$$e^{-12} \quad (6)$$

$$e^3 \quad (5)$$

$$e \quad (8)$$

$$e^{30} \quad (7)$$

чисוב גבול לפי כלל הסנדוויץ'

שאלות

בשאלות 1-10 חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + \sin n}{4n + \cos n} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(2n+1)}{n} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + \arctan(2n-3)}{4n + \arctan(n - \ln n)} \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n + \sin 2n}{n^2 + \cos 3n} \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + 2^{\frac{4n+1}{n}}} \quad (8)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} \quad (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) \quad (10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \quad (9)$$

רמז לשאלה 9: הוכחו כי $a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

11) הוכחו שכל אחת מהסדרות הבאות מתכנסת ל-0.

$$a_n = \left(\sqrt{2} - 2^{\frac{1}{3}} \right) \left(\sqrt{2} - 2^{\frac{1}{5}} \right) \cdot \dots \cdot \left(\sqrt{2} - 2^{\frac{1}{2n+1}} \right).$$

א. $\alpha \in (0,1)$, $a_n = n^\alpha - (n+1)^\alpha$

ב.

12) יהיו x מספר ממשי וחיובי.

$$a_n = \frac{6n + \sqrt{x^2 n^2}}{3n + \sqrt{2}}$$

נתבונן בסדרה:

הוכחו כי $2 < \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

13) חשבו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{2^{3n^2-4} + 3^{2n^2+1} + 4^{1.5n^2+5} + 10^n}$

14) חשבו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 3\sqrt{k}}}$

15) חשבו את הגבול . $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+3}^{2n+4} \frac{1}{\sqrt{2n^2 + k\sqrt{n}}}$

16) חשבו את הגבול . $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{2n^2 + 3n + 5}{\sqrt[3]{5n^{12} + 2k^5 + k^3 + 1}}$

17) חשבו את הגבול . $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n^2}^{n^2+n} \sqrt{k} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$

18) תהיו (a_n) סדרה חיובית, המקיים $1 < q < \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$ לכל n טבעי.

$$\text{הוכחו כי } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

האם ניתן לפתרן ישירות בעזרת מבחן המנה?

תשובות סופיות

- | | |
|-------------------------|-------------|
| 4 | (1) |
| 0 | (2) |
| 0 | (3) |
| 0.75 | (4) |
| 3 | (5) |
| $\frac{3}{4}$ | (6) |
| 0 | (7) |
| 16 | (8) |
| 0 | (9) |
| 1 | (10) |
| (11) שאלת הוכחה. | |
| (12) שאלת הוכחה. | |
| 9 | (13) |
| 1 | (14) |
| $\frac{1}{2}$ | (15) |
| $\frac{2}{\sqrt[3]{5}}$ | (16) |
| 1 | (17) |
| (18) שאלת הוכחה. | |

чисוב גבול לפי מבחן המנה ו מבחן השורש

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{4n} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{2n} \quad (5)$$

תשובות סופיות

0 (2)

0 (1)

$\frac{1}{4e}$ (4)

4 (3)

∞ (5)